Retour au menu

# Réseaux linéaires

## 1 – Définitions

Un réseau électrique linéaire est un ensemble de dipôles linéaires, reliés par des conducteurs de résistance négligeable. On suppose que le réseau contient au moins un générateur. Un réseau est constitué de *b* « branches » connectées par *n* « nœuds » et formant *m* « mailles ».

- ❒ Un **nœud** est un point de jonction de plusieurs conducteurs.
- ❒ Une **branche** est une portion de circuit entre deux nœuds.
- ❒ Une **maille** est un parcours *fermé*, constitué de branches et ne passant qu'une seule fois par un nœud donné.

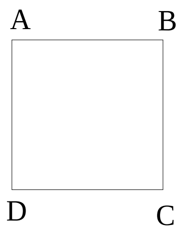


Fig 1-a

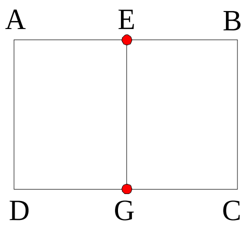


Fig 1-b

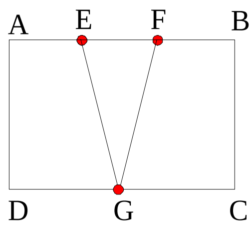


Fig 1-c

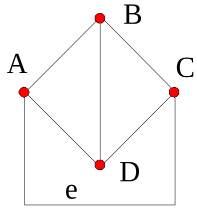


Fig 1-d

EXEMPLES.

1-a  Pour ce réseau, on a b = 1, n = 0, m = 1.

1-b :  b = 3, EADG, EG, EBCG.
n = 2, E et G.
m = 3, AEGDA, EBCGE, ABCDA.

1-c :  b = 5, EADG, EF, EG, FG, FBCG.
n = 3, E, F, G.
m = 6, AEGDA, EFGE, FBCGF, AFGDA, EBCGE, ABCD.

1-d :  b = 6, AB, BC, CD, DA, BD, AeC.
n = 4, A, B, C, D.
m = 7, ABDA, BCDB, ABCDA, ABCeA, ADCeA, ABDCeA, ADBCeA.

## 2 – Réseaux en régime permanent

**Connaissant les f.e.m. des générateurs et les résistances du réseau, résoudre celui-ci c'est déterminer l'intensité du courant qui circule dans chacune des branches.**

### 2.1 – Méthode générale de résolution

Il existe *b* branches dans le réseau donc *b* courants inconnus. Les *n* nœuds et les *m* mailles donnent *a priori* $n + m$ équations. Comme en général $n + m > b$, il faut trouver un système complet de *b* équations linéairement indépendantes.
Comme il existe $n – 1$ nœuds indépendants, il faut étudier $M = b – n + 1$ mailles.

**❒ Équations pour les nœuds**

Le nœud d'indice k est la jonction de p branches (d'indice j) parcourues par des courants $I_j^k$.

La loi de conservation de l'électricité (première loi de Kirchhoff) s'écrit sous la forme algébrique suivante :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{p} I_j^k = 0} \qquad (1)$$

❒ **Équations des mailles**

La maille d'indice k contient q branches. La différence de potentiel entre les extrémités de la branche j s'écrit $U_j^k$.

Comme la maille constitue un parcours fermé, on a (seconde loi de Kirchhoff) :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{q} U_j^k = 0} \qquad (2)$$

En procédant uniquement à des regroupements en série, on peut transformer toute branche j de la maille k en un générateur de f.e.m. $E_j^k$ en série avec une résistance $R_j^k$ parcourue par le courant $I_j^k$. (Si la branche ne contient pas de générateur alors $E_j^k = 0$). La loi des mailles peut donc aussi s'écrire sous la forme :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{q} E_j^k - \sum_{j=1}^{q} R_j^k . I_j^k = 0} \qquad (3)$$

Les sommes sont des sommes algébriques et l'écriture correcte des signes des différences de potentiel constitue la seule difficulté du problème.

> La méthode la plus rationnelle consiste à faire le choix d'un sens de parcours sur la maille étudiée (choix arbitraire) et à choisir pour chaque branche un sens pour le courant. La f.e.m. d'un générateur est comptée avec le signe de la borne par laquelle on entre dans celui-ci. Les d.d.p. aux bornes des résistances sont positives si le courant dans la branche a le même sens que le sens de parcours et négatives dans le cas contraire. On écrit que la somme des tensions est nulle. Si à l'issue du calcul, on obtient pour le courant d'une branche une valeur négative, c'est que le courant réel de cette branche circule dans le sens opposé à celui qui a été choisi[1]..

On obtient un système linéaire de M équations à M inconnues de la forme :

$$\begin{aligned}
R_1^1.I_1 + R_1^2.I_2 + \cdots + R_1^M.I_M &= E_1 \\
R_2^1.I_1 + R_2^2.I_2 + \cdots + R_2^M.I_M &= E_2 \qquad (4) \\
\\
R_M^1.I_1 + R_M^2.I_2 + \cdots + R_M^M.I_M &= E_M
\end{aligned}$$

qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[R].(I) = (V) \qquad (5)$$

[R] est une M×M matrice dont la dimension des éléments est celle d'une résistance. (I) et (V) sont des vecteurs colonnes à M éléments.

## 2.2 – Résolution du système

❒ En multipliant à gauche la matrice [R] par son inverse, on tire :

---

[1] Si la branche contient un récepteur *polarisé*, il faut faire l'étude pour les deux sens du courant. Selon celui-ci, le «récepteur» se comporte soit comme un récepteur soit comme un générateur.

$$[R^{-1}].[R].(I) = [R^{-1}].(V) = [G].(U)$$
$$(I) = [G].(U)$$

La dimension des éléments de [G] est celle d'une conductance. La valeur du courant dans la branche j est donc :

$$I_j = \sum_{i=1}^{M} G_j^i . U_i \qquad (6)$$

❒ Il est aussi possible d'utiliser la méthode de Kramer pour la résolution du système. Si $\Delta$ est le déterminant de la matrice [R], $\Delta_j$ le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la j^e^ colonne de [R] par la colonne (V), on a :

$$I_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$$

❒ Si M = 2, il est plus simple d'utiliser la méthode de substitution pour résoudre le système.

❒ Dès que M est supérieur à 3, la résolution manuelle du système est fastidieuse. On cherche alors à mettre en oeuvre les méthodes de simplification des réseaux qui permettent de n'étudier que les branches pertinentes.

## 2.3 – Loi de Pouillet [2]

Dans le cas où le réseau ne comporte qu'une maille, il est possible de transformer le circuit initial en un circuit ne comportant qu'un seul générateur, dont la f.e.m. est la somme algébrique des f.e.m. des générateurs de la maille ($E = \sum_k E_k$) et une seule résistance $R = \sum_k R_k$ .

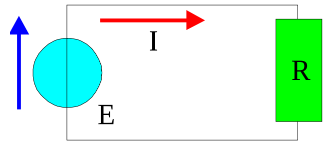



Fig. 2

L'intensité dans le circuit est donc : $\boxed{I = \frac{E}{R} = \frac{\sum E_k}{\sum R_k}}$

Cette relation constitue la loi de Pouillet.

## 2.4 – Exemples

### a – Méthode générale

On cherche les courants dans toutes les branches du circuit de la figure 3.

Le choix du sens des courants dans les 5 branches est arbitraire. Il y a pour cet exemple trois courants à calculer $I_1$, $I_2$ et $I_3$ car la loi des nœuds en B et C donne : $I_4 = I_1 - I_2$ et $I_5 = I_2 - I_3$

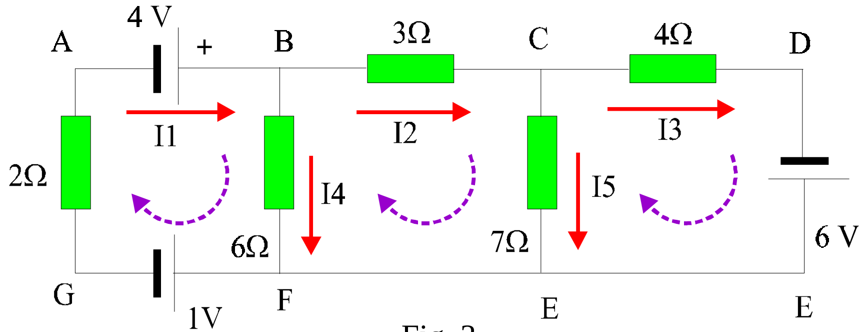



Fig. 3

[2] Claude Pouillet (physicien français) 1790-1868

Les flèches en pointillés violets indiquent les sens de parcours, choisis arbitrairement, des 3 mailles étudiées.

Pour la maille ABFGA, on obtient :

$$(V_A - V_B) + (V_B - V_F) + (V_F - V_G) + (V_G - V_A) = 0$$

Soit : $-4 + 6.(I_1 - I_2) + 1 + 2.(I_1) = 0$

De même : $-6.(I_1 - I_2) + 3.(I_2) + 7.(I_2 - I_3) = 0$ (maille FBCEF)

$-7(I_2 - I_3) + 4.(I_3) - 6 = 0$ (maille ECDE)

– D'ou la représentation matricielle du système :

$$\begin{bmatrix} 8 & -6 & 0 \\ -6 & 16 & -7 \\ 0 & -7 & 11 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Pour résoudre ce système linéaire, il suffit d'inverser la matrice : on la transpose, puis on remplace dans la transposée chaque terme par son cofacteur(attention au signe) divisé par le déterminant. On peut aussi utiliser un logiciel spécialisé.

Cliquez ici pour résoudre cet exemple.

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{620} \begin{bmatrix} 127 & 66 & 42 \\ 66 & 88 & 56 \\ 42 & 56 & 92 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

– Résolution par la méthode de Kramer : (pour obtenir la variable k, on divise le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la k$^{e}$ colonne par la colonne des constantes par le déterminant de la matrice initiale.

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 16 & -7 \\ 6 & -7 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -6 & 0 \\ -6 & 16 & -7 \\ 0 & -7 & 11 \end{vmatrix}} = \frac{633}{620} = 1{,}021 \text{ A}; \quad I_2 = \frac{534}{620} = 0{,}861 \text{ A}; \quad I_3 = \frac{678}{620} = 1{,}093 \text{ A}$$

REMARQUE : Comme $I_5 = -0{,}232$ A est négatif, le courant dans la branche CE circule dans le sens contraire à celui de la flèche de la figure 3. Les courants réels $I_2$ et $I_3$ circulent dans le sens contraire des flèches.

### b – Méthode par substitutions

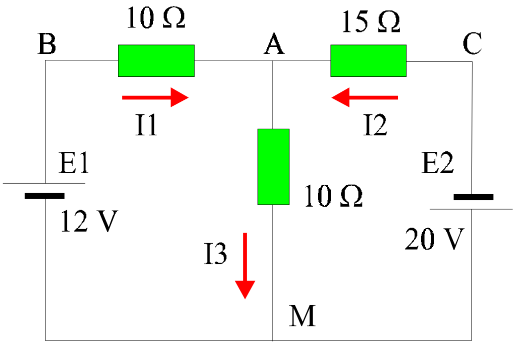



fig. 4

On cherche à déterminer $V_{AM}$

Mise en équation :

$$I_3 = I_1 + I_2$$

maille BAMB : $20.I_1 + 10.I_2 = 12$ (a)

maille CMAC : $10.I_1 + 25.I_2 = -20$ (b)

Résolution :

De la différence (a) – 2.(b), on tire :

$40.I_2 = -52$ soit $I_2 = -1{,}3$ A.

$V_{AM} = R_{AM}.I_3 = -0{,}5$ V.

et donc : $I_1 = 1{,}25$ A et $I_3 = -0{,}05$

# 3 – Théorème de Millman [3]

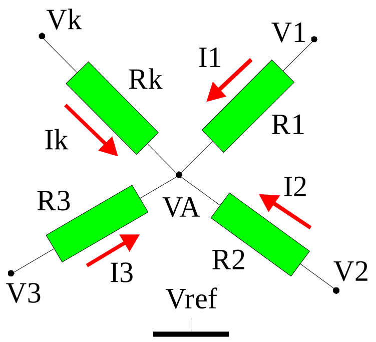


fig.5

On considère un nœud A auquel aboutissent k branches ; les potentiels $V_i$ des extrémités des branches sont tous définis par rapport à un <u>même potentiel de référence</u> $V_{ref}$ ;
$R_i$ est la résistance de la branche i et $G_i$ sa conductance.
La loi des nœuds s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{k} I_i = I_1 + I_2 + \cdots + I_k = 0$$

$$\frac{V_1 - V_A}{R_1} + \frac{V_2 - V_A}{R_2} + \cdots + \frac{V_k - V_A}{R_k} = 0$$

$$(V_1 - V_A).G_1 + (V_2 - V_A).G_2 + \cdots + (V_k - V_A).G_k = 0$$

$$V_A.\sum G_i = \sum V_i.G_i$$

Le potentiel du point A par rapport à celui de la référence commune est donc :

$$\boxed{V_A = \frac{\sum_i V_i.G_i}{\sum_i G_i}} \qquad (8)$$

Exemple : Sur le schéma de la figure 4, on prend le point M comme origine des potentiels. On a donc $V_B = 12$ V, $V_C = -20$ V, $V_M = 0$.

$$V_{AM} = V_A = \frac{\frac{V_B}{10} + \frac{V_C}{15} + \frac{V_M}{10}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{10}} = -0{,}5\ \text{V}$$

**Remarques** :

- Soit $I_k$ le courant dans la branche k. Il peut être intéressant d'écrire le théorème de Millman sous la forme suivante :

$$V_A = \frac{I_k + \sum_{i \neq k} V_i.G_i}{\sum_{i \neq k} G_i}$$

- Le théorème de Millman (qui est une autre façon d'écrire la loi des nœuds) permet dans de nombreux cas de résoudre rapidement un réseau mais il faut l'appliquer correctement :

> Lors de la mise en œuvre, ne pas oublier de faire figurer au dénominateur les branches dont le potentiel de l'extrémité est nul !

# 4 – Théorème de superposition

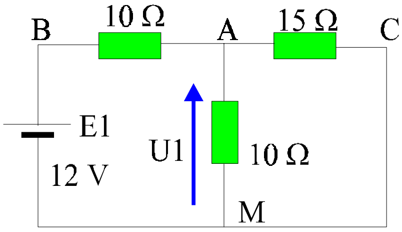
Ce théorème découle directement de la linéarité des équations de Kirchhoff : un dipôle constitué de dipôles linéaires est un dipôle linéaire. Dans un réseau linéaire, il est possible de remplacer un ensemble de dipôles par un dipôle équivalent. La relation (6) montre que le courant $I_j$ dans une branche est la somme de termes de la forme $G_j^k.U_k$ , les $G_j^k$ ayant la dimension d'une conductance.

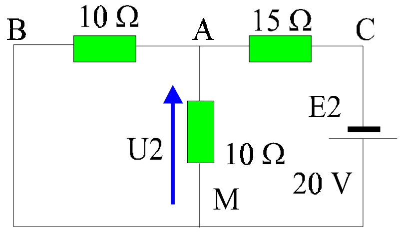
> L'intensité du courant dans une branche d'un réseau comprenant plusieurs générateurs est la somme des intensités, que ferait passer, dans cette branche, chaque générateur considéré isolément comme actif, les autres générateurs du réseau étant alors passifs.

[3] Jacob Millman (physicien américain) contemporain

**Rendre passif un générateur, c'est le remplacer par sa résistance interne**.

EXEMPLE : Sur le schéma de la figure 4, on remplace successivement chaque générateur par un court-circuit.




Si $E_2 = 0$ la résistance équivalente entre A et M est (15 Ω // 10 Ω) = 6 Ω

$U_1$ est la tension aux bornes d'une résistance de 6 Ω dans un circuit de résistance totale égale à 16 Ω alimenté par une tension $E_1$.

$U_1 = 12.6/(10 + 6) = 4{,}5$ V

Si $E_1 = 0$ la résistance équivalente entre A et M est (10 Ω // 10 Ω) = 5 Ω

La tension $U_2$ induite entre A et M par le seul générateur $E_2$ est égale à :

$U_2 = -\,20.5/(15 + 5) = -\,5$ V

On en déduit : $V_{AM} = U_1 + U_2 = -\,0{,}5$ V

Cliquez ici pour faire d'autres exercices sur le principe de superposition.

# 5 – Circuits équivalents

## 5.1 – Théorème de Thévenin [4]

On considère un réseau comprenant des dipôles actifs et passifs et on s'intéresse au fonctionnement d'un dipôle D particulier. Il est traversé par un courant I et la d.d.p. entre ses bornes est U.

Supposons que D soit isolé du reste du réseau. Si ce reste de réseau est actif, la f.e.m. mesurée entre A et B vaut $E_T$ : c'est la tension en circuit ouvert. S'il est rendu passif c'est-à-dire si les générateurs sont remplacés par leurs résistances internes, la résistance mesurée entre A et B vaut $R_T$. On remplace D par une source de tension idéale de f.e.m. U. D'après le théorème de superposition, le fonctionnement du circuit est inchangé. Le courant I est la superposition d'un courant $I_P$ correspondant à la passivation de toutes les sources autres que U et d'un courant $I_A$ où seule la source U est passivée : $I = I_P + I_A$

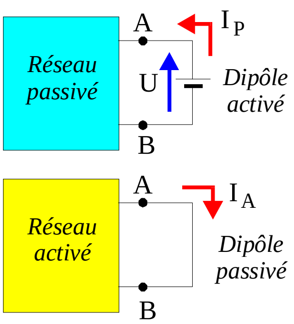



Fig. 6

– Si le générateur qui remplace D est seul à être actif le reste du réseau est équivalent à $R_T$ : $I_P = -\,U/R_T$

– Si on passive ce générateur, il est équivalent à une résistance nulle : le reste du réseau débite dans ce fil le courant $I_A = E_T/R_T$

Ce courant est le courant de court-circuit entre A et B.

$$I = I_A + I_P = E_T/R_T - U/R_T$$

L'équation du circuit équivalent est donc :

$$\boxed{U = E_T - R_T.I}$$

Cette équation est celle d'un générateur de tension que l'on nomme le *générateur de Thévenin* du circuit. Les deux circuits de la figure 7 sont équivalents et l'application de la loi de Pouillet au circuit de droite donne de façon triviale : $E_T = (R_T + D).I$

[4] Louis Thévenin (physicien français) 1857-1926

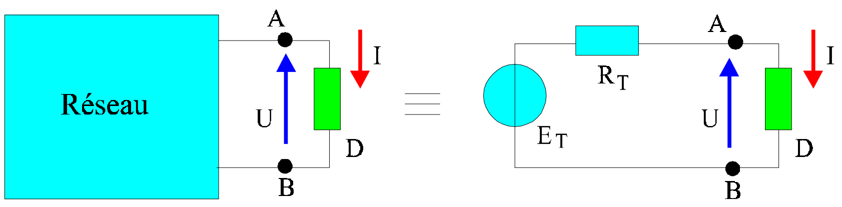


Fig. 7

> Un réseau linéaire, vu entre deux bornes A et B, peut être remplacé par un générateur de tension de f.e.m. $E_T$ et de résistance interne $R_T$.
> – $E_T$ est la d.d.p. mesurée à vide entre A et B.
> – $R_T$ est la résistance mesurée entre A et B quand D est retiré du circuit et que tous les générateurs du réseau sont remplacés par leurs résistances internes.

## 5.2 – Théorème de Norton

C'est la transformation duale de celle de Thévenin. La source de tension ($E_T$, $R_T$) est remplacée par une source de courant ($I_N$, $R_N$).

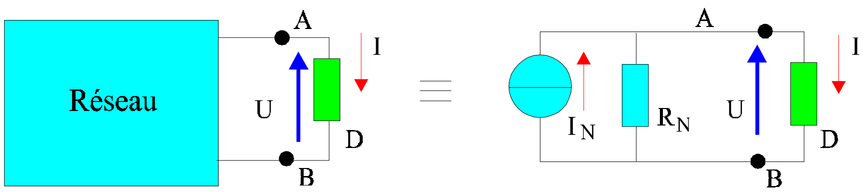


Fig. 8

Si on remplace D par un court-circuit, le courant qui circule entre A et B est :

$$I_N = E_T/R_T = E_T/R_N = E_T.G_N$$

$R_N$ est la résistance entre A et B quand les générateurs du réseau sont passivés.

L'équation du circuit équivalent est donc : $\boxed{I = I_N - G_N.U}$

> Un réseau linéaire, vu entre deux bornes A et B, peut être remplacé par une source de courant d'intensité $I_N$ et de résistance interne $R_N$.
> – $I_N$ est le courant de court-circuit entre A et B.
> – $R_T$ est la résistance mesurée entre A et B quand D est retiré du circuit et que tous les générateurs du réseau sont remplacés par leurs résistances internes.

**La connaissance d'un modèle équivalent permet la déduction immédiate du modèle dual car $R_T = R_N$**

Les paramètres des générateurs équivalents sont reliés par : $\boxed{E_T = R_T.I_N}$

Quand on étudie un dipôle particulier d'un réseau, les méthodes de Thévenin et de Norton sont très efficaces car elles permettent de remplacer un circuit complexe par un circuit élémentaire dans lequel les calculs sont immédiats.

## 5.3 – Exemples d'application

On cherche, en utilisant des équivalents Thévenin et Norton du circuit de la figure 4, à déterminer $U = V_{AM}$

– <u>Équivalent Thévenin</u>
La partie du circuit située à droite de AM (maille ACMA) est remplacée par le générateur $E_T$, $R_T$. La résistance $R_T$ est celle qui est vue entre A et M quand $E_2$ est remplacé par un court-circuit : $R_T = (10\ \Omega\ //\ 15\ \Omega) = 6\ \Omega$.

La tension $E_T$ est la d.d.p. entre A et M quand la partie gauche du circuit est débranchée. C'est la chute de tension dans la résistance $R_{AM}$ qui est alimentée par le générateur $E_2$ en série avec $R_{AC}$ : $E_T = -20.\{10/(10+15)\} = -8$ V.
On forme ainsi une maille unique dans laquelle le courant est égal à :
$I = (12 + 8) / (10 + 6) = 1{,}25$ A.

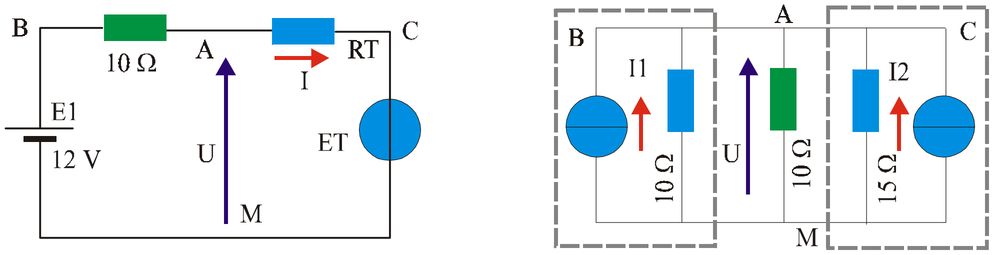



Fig. 8

On en déduit $V_{AM} = V_{AB} + V_{BM} = -10.1{,}25 + 12 = -0{,}5$ V

– <u>Équivalent Norton</u>
On remplace le générateur $E_1$ et la résistance entre BA par le générateur de Norton équivalent ($I_1 = 12/10 = 1{,}2$ A et $R_1 = 10\ \Omega$). On fait de même pour le générateur $E_2$ : $I_2 = -20/15 = -4/3$ A et $R_2 = 15\ \Omega$. L'ensemble est équivalent à un générateur de courant $I = I_1 + I_2$ qui débite dans une résistance $R_0$ équivalente à ($10\ \Omega$ // $15\ \Omega$ // $10\ \Omega$) soit $30/8\ \Omega$. La d.d.p. entre A et M est donc : $R_0.I = -0{,}5$ V.
On peut noter sur cet exemple la complète analogie entre les théorèmes de Norton et de Millman.

Cliquez ici pour faire d'autres exercices.

## 6 – Théorème de Kennelly [5]

La transformation suivante est parfois utilisée pour la simplification de circuits comportant des dérivations.

### Équivalence étoile-triangle

Les deux circuits de la figure 11 sont équivalents si les valeurs de leurs résistances sont liées par les relations indiquées ci-dessous.

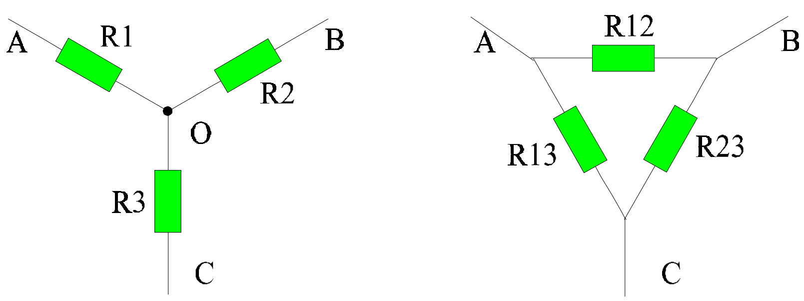



Fig. 11

Le passage de la structure triangle (ABC) à la structure étoile (OABC) s'obtient par les relations :
Si **on déconnecte le point A**, il doit y avoir égalité des impédances entre B et C.

$$Z_{23} = R_2 + R_3 = R_{23} // (R_{12} + R_{13}).$$

[5] Arthur Kennelly (physicien américain) 1861-1939

On tire les trois égalités suivantes :

$$R_2 + R_3 = \frac{R_{12}R_{23} + R_{13}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \;;\; R_2 + R_1 = \frac{R_{12}R_{23} + R_{13}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \;;\; R_1 + R_3 = \frac{R_{12}R_{13} + R_{13}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}$$

En sommant les 2 premières égalités et en retranchant la 3[e], on déduit :

$$\boxed{R_1 = \frac{R_{12}.R_{13}}{R_{12} + R_{12} + R_{23}} \qquad R_2 = \frac{R_{12}.R_{23}}{R_{12} + R_{12} + R_{23}} \qquad R_3 = \frac{R_{23}.R_{13}}{R_{12} + R_{12} + R_{23}}}$$

Pour la transformation inverse, **on relie B et C** : la conductance entre A et B-C s'écrit alors :

$$\frac{1}{Z_a} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{13}} = \frac{R_2 + R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}$$ ( $Z_a = R_{12} // R_{13}$ ou $R_1 + (R_2 // R_3)$)

On calcule de même $1/Z_b$ et $1/Z_c$ et l'on calcule $1/Z_a + 1/Z_b - 1/Z_c$

Il vient : $\frac{2}{R_{13}} = \frac{2R_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$ soit : $R_{13} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2}$...

On peut aussi écrire que :

$$S = R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1 = \frac{R_{12}R_{13}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}.$$ Mais comme : $\frac{S}{R_1} = R_{23}$

on déduit : $R_{23} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1}$ ...

Les relations réciproques sont équivalentes à : $G_{23} = \frac{G_2G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$...

Cliquez ici pour tester ces relations.

## 7 – Conclusion

Les différentes méthodes étudiées sont équivalentes mais pour l'étude d'un réseau particulier certaines sont mieux adaptées que d'autres. La principale difficulté de ce type de problèmes est de trouver la méthode la plus pertinente. La méthode de Millman, souvent très efficace, n'est pas la panacée et la méthode de Thévenin doit être utilisée aussi souvent que possible car elle permet de transformer des circuits complexes en des circuits types élémentaires. La mise en œuvre simultanée de plusieurs méthodes peut aussi s'avérer utile.

Retour au menu